

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ БИОМЕХАНИКИ СЕРДЦА

Б.Я. Кантор<sup>1</sup>, Е.Ю. Мисюра<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, г. Харьков,

<sup>2</sup>Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

*Построен вариационный принцип возможных перемещений в приращениях, используемый далее в шаговом алгоритме метода конечных элементов при решении физически и геометрически нелинейных задач механики левого желудочка сердца. Получена матричная форма основных соотношений, формулы для вычисления матрицы жесткости, вектора правой части системы линейных алгебраических уравнений. Кратко описаны особенности алгоритма и программы. Построена модель левого желудочка, которая представлена в виде однородной усеченной толстостенной эллипсоидальной оболочки. Изучена первая фаза сердечного цикла – диастолы. К внутренней поверхности модели приложено конечно-диастолическое давление. Методом конечных элементов решена осесимметричная нелинейная квазистатическая задача теории упругости. Численно исследованы напряженно-деформированное состояние левого желудочка сердца, интенсивность деформаций и напряжений, приведены графики распределения деформаций, напряжений и перемещений.*

### Введение

Проблеме исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) стенок сердца уделяется значительное внимание в современной научной литературе [1–9]. Сложность этих задач связана не только с непростой формой изучаемых объектов, но и с сильной нелинейностью механических свойств материала, а также с тем, что нельзя пренебречь величиной перемещений (особенно по нормали к толщине стенки) по сравнению с характерными размерами объекта. При этом задача становится геометрически нелинейной. Получение точных решений такого рода задач невозможно, поэтому необходимо применение численных методов; наиболее эффективным является метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод с успехом использован в работах [1, 4–9].

Целью настоящего доклада является изложение постановки задачи о деформировании модели левого желудочка (ЛЖ) сердца в диастолу, вариационного принципа возможных перемещений в приращениях для реализации шагового процесса решения задачи, основных геометрических и физических соотношений, их матричного представления, алгоритма построения разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Кратко описаны особенности программы на языке DELPHI 7. Приведены численные результаты.

### Постановка задачи

Проблема исследования НДС стенки ЛЖ сердца очень сложна в точной постановке. Это связано со сложностью формы сердца, неоднородностью, анизотропией и нелинейностью механических свойств сердечной мышцы (миокарда), переменностью внутреннего давления во времени и т.д. Для разумного упрощения задачи и получения необходимых результатов введем некоторые упрощения:

1) стенку ЛЖ сердца аппроксимируем толстостенным эллипсоидом (рис. 1);

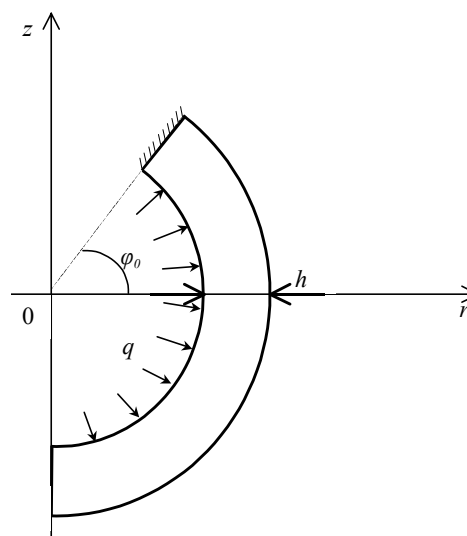


Рисунок 1. Модель ЛЖ, представленная в виде толстостенного эллипсоида

2) решаем осесимметричную задачу в цилиндрической системе координат;

3) материал стенки считаем однородным, изотропным, почти несжимаемым, гиперупругим (нелинейным);

4) решаем квазистатическую задачу, так как силами инерции можно пренебречь по сравнению с упругими силами;

5) задачу решаем в геометрически и физически нелинейной постановке;

6) рассматриваем диастолу, таким образом, к внутренней стороне стенки ЛЖ прикладываем диастолическое давление.

### 1. Основные соотношения

Введем вектор-столбец компонент вектора

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{z\varphi} \\ \gamma_{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (3)$$

В матричной форме соотношение (3) будет:

$$[\varepsilon] = [L][u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \\ u_\varphi \end{bmatrix} \quad (4)$$

перемещений в цилиндрической системе координат:

$$[u] = [u_r \quad u_z \quad u_\varphi]^T \quad (1)$$

Здесь  $u_r, u_z, u_\varphi$  являются функциями от  $r, z$ .

Деформации находятся с помощью соотношений Коши, которые в матричной форме можно записать в виде [10]:

$$[\varepsilon] = [L][u] \quad (2)$$

Здесь  $[\varepsilon]$  – вектор-функция компонент тензора деформаций в точке.

В частном случае геометрически линейной задачи вектор-столбец осесимметричной деформации имеет вид:

В геометрически нелинейном случае [11]

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{1}{2}(\bar{u}_{,i} \cdot \bar{u}_{,k}), \quad i, k = r, z, \varphi. \quad (5)$$

Здесь запятая обозначает ковариантное дифференцирование, черта сверху обозначает вектор.

Имея в виду применение шагового метода

$$d\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}) + \frac{1}{2}(v_{v,i}u_{v,k} + u_{v,i}v_{v,k}), \quad i, k, v = r, z, \varphi. \quad (6)$$

Это соотношение линейно относительно  $v_i$ . Представим его в матричной форме:

$$[e] = [\tilde{L}][v]. \quad (7)$$

Операторная матрица  $[\tilde{L}]$  имеет вид:

$$[\tilde{L}] = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}\right) & \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} & 0 & \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & 0 & \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь  $u_k$  – компоненты полного вектора перемещений, накопленного в шаговом процессе.

Для полноты изложения приведем матричную форму закона Гука изотропного материала. Соотношения между напряжениями и деформациями имеют вид:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon], \quad (9)$$

$$\text{где } [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{zz} & \sigma_{\varphi\varphi} & \tau_{rz} & \tau_{z\varphi} & \tau_{\varphi} \end{bmatrix}^T,$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & \gamma_{rz} & \gamma_{z\varphi} & \gamma_{\varphi} \end{bmatrix}^T,$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

решения задачи, найдем приращение деформаций  $e_{ik}$  (5); приращение перемещений обозначим через  $v_i$ . Тогда получим:

$[D]$  – матрица упругости,  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ляме, которые связаны с известными константами – модулем упругости (модулем Юнга)  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  (для реальных материалов  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ ) – следующими соотношениями

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Рассмотрим случай гиперупругого материала. Имеет место следующее тензорно-линейное соотношение между приращениями напряжений  $s^{ik}$  и деформаций  $e_{ik}$ :

$$s^{ik} = \tilde{D}^{iklm} e_{lm}, \quad (10)$$

где компоненты тензора равны вторым производным от потенциала

$$W = W(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\varphi}, \gamma_{\varphi}).$$

В матричной форме соотношение (10) будет

$$[s] = [\tilde{D}][e], \quad (11)$$

где  $[s] = [s_{rr} \quad s_{zz} \quad s_{\varphi\varphi} \quad s_{rz} \quad s_{z\varphi} \quad s_{\varphi}]^T$ ,

$$[e] = [e_{rr} \quad e_{zz} \quad e_{\varphi\varphi} \quad \gamma_{rz} \quad \gamma_{z\varphi} \quad \gamma_{\varphi}]^T,$$

$$\gamma_{ik} = 2e_{ik}, \quad i \neq k, \quad i, k = r, z, \varphi.$$

Заменяя индексы в векторе  $[e]$  на 1, ..., 6, получим:

$$\tilde{D}_{ik} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k}. \quad (12)$$

Использованные в работе потенциалы будут приведены далее.

Граничные условия задачи следующие: кинематическое, т.е. условие закрепления в основании ( $\varphi = \varphi_0$ ), а также  $u_r = 0$  на оси z; стати-

ческие  $\sigma_n = 0, \sigma_\tau = 0$  – на внешней поверхности,  $\sigma_n = -q, \sigma_\tau = 0$  – на внутренней. Статические условия выполняются автоматически в силу использования вариационного принципа.

## 2. Вариационный принцип

Для решения задачи применим вариационный принцип возможных перемещений в приращениях.

Рассмотрим тело с объемом  $V$ , заполненное упругой сплошной средой, в некоторый момент времени  $t$ . Пусть накопленные к этому моменту за счет деформирования компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений есть  $\sigma^{ik}, \varepsilon_{ik}, \bar{u}$  соответственно, а их приращения за время  $\Delta t$  есть  $s^{ik}, e_{ik}, \bar{v}$ . Выберем связанную с телом ортогональную систему координат и получим формулу для приращения деформации  $e_{ik}$ , вводя в соотношения Коши (5) вектор  $\bar{u} + \bar{v}$  вместо  $\bar{u}$ :

$$\varepsilon_{ik} + e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(u_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(u_k + v_k)}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_k}. \quad (13)$$

Записывая деформацию  $\varepsilon_{ik}$  для момента времени  $t$  (5) в виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \quad (14)$$

и вычитая (14) из (13), находим:

$$\begin{aligned} e_{ik} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \left( \delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \left( \delta_{mk} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (15)$$

Слагаемое, стоящее в (15) в квадратных скобках, обозначим далее  $\tilde{e}_{ik}$ , так что

$$e_{ik} = \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}. \quad (16)$$

Пусть на части поверхности  $\Sigma$  тела задано внешнее давление  $q$ . Запишем вариационное уравнение принципа возможных перемещений для момента времени  $t + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma^{ik} + s^{ik}) \delta(\varepsilon_{ik} + e_{ik}) dV = \\ = \int_\Sigma (q + \Delta q) \delta(u_n + v_n) d\Sigma, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\Delta q$  – приращение давления за время  $\Delta t$ ,  $u_n$  и  $v_n$  – перемещение и приращение перемещения по нормали к поверхности  $S$ . Учитывая, что  $\delta \varepsilon_{ik} = 0$  и  $\delta u_n = 0$ , из (17) получим:

$$\int_V s^{ik} \delta e_{ik} dV - \int_\Sigma \Delta q \delta \delta_n d\Sigma + \delta R = 0, \quad (18)$$

где  $\delta R = \int_V \sigma^{iki} \delta e_{ik} dV - \int_\Sigma q \delta \delta_n d\Sigma$ . (19)

Приращения напряжений  $s^{ik}$  и деформаций  $e_{ik}$  связаны законом (10).

В случае, если состояние тела в момент времени  $t$  является равновесным,  $\delta R = 0$ . Однако,

при использовании шагового процесса в связи с конечностью величины  $\Delta t$  возникает погрешность. Поэтому при построении алгоритма целесообразно не отбрасывать невязку  $R$ . Это позволяет применить эффективный самокорректи-

рующийся шаговый метод решения задачи [14].

Подставляя (16)–(17) в (18) и учитывая лишь слагаемые второго порядка относительно приращений перемещений, получаем вариационный принцип

$$\delta U = 0, \quad (20)$$

где

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[ \tilde{D}^{iklm} e_{ik} e_{lm} + \sigma^{ik} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right] dV - \int_{\Sigma} \Delta q v_n d\Sigma + R. \quad (21)$$

Варьируемыми в функционале  $U$  являются лишь компоненты вектора  $\vec{v}$ .

Уравнение (20) можно решать численно с помощью одного из прямых вариационных методов: Ритца, вариационно-разностного, вариационного векторно-разностного [15], МКЭ. Полные значения компонентов  $\sigma^{ik}$ ,  $\varepsilon_{ik}$ ,  $\vec{u}$  вычисляются суммированием приращений, полученных в шаговом процессе по параметру (нагрузки или времени).

Заметим, что второе слагаемое в первом интеграле формулы (21) отражает влияние геометрической нелинейности задачи. В случае линейной упругости материала тензор  $\tilde{D}^{iklm}$  не зависит от времени.

### 3. Метод конечных элементов

Решение нелинейных задач механики для тел сложной формы требует применения численных методов. Одним из таких методов является МКЭ [12-13].

Модель тела разбиваем на конечное число связанных в узловых точках восьмиузловых конечных элементов (КЭ). В КЭ введем систему локальных координат  $-1 \leq \zeta_1 \leq 1, -1 \leq \zeta_2 \leq 1$  (рис. 2).

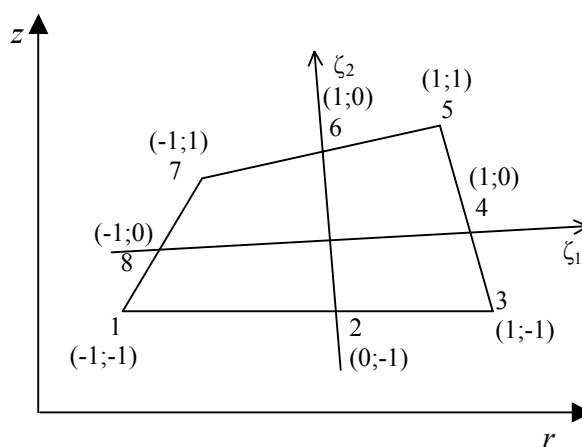


Рисунок 2. Оси локальной системы координат КЭ

Составим вектор узловых перемещений элемента:

$$[\tilde{u}] = [u_{r1} \ u_{z1} \ u_{\varphi1} \ \dots \ u_{r8} \ u_{z8} \ u_{\varphi8}]^T. \quad (22)$$

Перемещения произвольной точки КЭ выражаются через перемещения узловых точек следующим образом:

$$[u] = [N][\tilde{u}], \quad (23)$$

где  $[N]$  – матрица функций формы. Эта матрица имеет следующий вид:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Функции  $N_k$ ,  $k = 1, \dots, 8$  должны быть выбраны таким образом, чтобы при подстановке координат узлов получались значения аппроксими-

руемой функции в этих узлах. По определению функция формы принимает значение единица в этом узле и нуль во всех других узлах, т.е.

$$N_i(x_i, y_i) = 1, \quad N_i(x_j, y_j) = 0,$$

если  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, 8$ .

В данном случае имеем:

$$N_1 = \frac{(1 - \zeta_1)(1 + \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_1 - 1)}{4},$$

$$N_2 = \frac{(1 - \zeta_2^2)(1 - \zeta_1)}{2},$$

$$\begin{aligned}
N_3 &= \frac{(\zeta_1 - 1)(1 - \zeta_2)(\zeta_1 + \zeta_2 + 1)}{4} \\
N_4 &= \frac{(1 - \zeta_1^2)(1 - \zeta_2)}{2} \\
N_5 &= \frac{(1 + \zeta_1)(1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_2 - 1)}{4} \\
N_6 &= \frac{(1 - \zeta_2^2)(1 + \zeta_1)}{2} \\
N_7 &= \frac{(1 + \zeta_1)(1 + \zeta_2)(\zeta_1 + \zeta_2 - 1)}{4} \\
N_8 &= \frac{(1 - \zeta_1^2)(1 + \zeta_2)}{2}
\end{aligned} \quad (25)$$

Тогда глобальные координаты произвольной точки КЭ выражаются через функции формы и значения координат его узлов следующим образом:

$$\begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{pmatrix} r_i \\ z_i \end{pmatrix} N_i, \quad (26)$$

где  $r_i, z_i$  – координаты узлов КЭ.

Поскольку в функционал энергии деформации помимо перемещений, входят и их первые производные, то необходимо получить выражения для производных функций формы по глобальным координатам. Установим связь между координатами  $r, z$  и  $\zeta_1, \zeta_2$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial r} \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, 8. \quad (27)$$

Введем матрицу перехода  $[I]$ :

$$\begin{aligned}
[I] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} \\ r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (28)$$

Обращение этой матрицы позволяет выразить первые частные производные функции формы в декартовых координатах через систему производных в локальной координатной системе. Обратная матрица

$$[I]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где  $\Delta \equiv \det(I) = ad - cb$ . Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}[N] &= a_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}[N] + b_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2}[N], \\
\frac{\partial}{\partial z}[N] &= c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}[N] + d_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2}[N]
\end{aligned} \quad (30)$$

Производные от функций формы имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{4}(2\zeta_1 + 2\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2^2 - \zeta_2), \\
\frac{\partial N_1}{\partial \zeta_2} &= \frac{1}{4}(-\zeta_1 - 2\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1^2 + 2\zeta_2), \\
\frac{\partial N_2}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{2}(\zeta_2^2 - 1), \quad \frac{\partial N_2}{\partial \zeta_2} = \zeta_2(\zeta_1 - 1), \\
\frac{\partial N_3}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{4}(2\zeta_1 - 2\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2^2 + \zeta_2) \\
\frac{\partial N_3}{\partial \zeta_2} &= \frac{1}{4}(\zeta_1 - 2\zeta_1\zeta_2 - \zeta_1^2 + 2\zeta_2) \\
\frac{\partial N_4}{\partial \zeta_1} &= \zeta_1(\zeta_2 - 1), \quad \frac{\partial N_4}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{2}(\zeta_1^2 - 1) \\
\frac{\partial N_5}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{4}(2\zeta_1 - 2\zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2 - \zeta_2), \\
\frac{\partial N_5}{\partial \zeta_2} &= \frac{1}{4}(-\zeta_1 + 2\zeta_1\zeta_2 - \zeta_1^2 + 2\zeta_2), \\
\frac{\partial N_6}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{2}(1 - \zeta_2^2), \quad \frac{\partial N_6}{\partial \zeta_2} = -\zeta_2(1 + \zeta_1), \\
\frac{\partial N_7}{\partial \zeta_1} &= \frac{1}{4}(2\zeta_1 + 2\zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2 + \zeta_2),
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{4}(\zeta_1 + 2\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1^2 + 2\zeta_2),$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \zeta_1} = -\zeta_1(\zeta_2 + 1), \quad \frac{\partial N_8}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{2}(1 - \zeta_1^2)$$

Введем исходные матричные соотношения для приращений компонент вектора перемеще-

$$[\delta \tilde{v}]^T \left\{ \int_V [\tilde{L}N]^T [E] ([\tilde{L}N] + [LN])^T [\sigma] [LN] dV \right\} [\tilde{v}] - [\delta \tilde{v}]^T \int_{\Sigma} [\Delta q] d\Sigma + [\delta \tilde{v}] [R], \quad (34)$$

где  $[\Delta q] = [\Delta q_r, \Delta q_z, 0]^T$ ,  $[\tilde{L}N]$  – матрица, полученная умножением матрицы  $[\tilde{L}]$  на матрицу функций формы  $[N]$ ,

$$[R] = \int_V [\tilde{L}N]^T [\sigma] dV - \int_{\Sigma} [q] d\Sigma, \quad (35)$$

$$[q] = [q_r, q_z, 0]^T.$$

Суммируя соотношения (34) по всем конечным элементам, приравнявая нулю множители при вариациях компонент вектора узловых значений перемещений и учитывая кинематические граничные условия, приходим к СЛАУ

$$\left( [K_e] + [K_g] \right) [\tilde{v}] = [Q_q] - [Q_R]. \quad (36)$$

Введем обозначение  $[K] = [K_e] + [K_g]$ . Используя это обозначение, перепишем (36):

$$[K][\tilde{v}] = [Q_q] - [Q_R]. \quad (37)$$

Здесь  $[K_e]$  и  $[K_g]$  – матрицы жесткости и геометрической жесткости, равные интегралам от первого и второго слагаемого в (34). Первая из них отвечает геометрически линейной задаче, вторая учитывает геометрическую нелинейность.

#### 4. Особенности алгоритма и программы

Алгоритм и программа для персонального компьютера представляют собой совокупность ряда функциональных блоков и реализующих их процедур. Наиболее часто используются в процессе счета процедуры вычисления значений функций формы и их производных, формирования матриц  $[L]$  и  $[\tilde{L}]$ , матриц упругих констант

ний и тензора приращений деформаций для одного КЭ:

$$[v] = [N][\tilde{v}], \quad (32)$$

$$[e] = [L][N][\tilde{v}] = [LN][\tilde{v}]. \quad (33)$$

Здесь  $[LN]$  – матрица  $6 \times 24$ , полученная умножением матрицы  $[L]$  на матрицу  $[N]$ .

Подставляя приведенные выше формулы в уравнение (20), получим

физического закона  $[D]$ ,  $[\tilde{D}]$  и матриц подынтегрального выражения в формуле для матрицы  $[K]$  в узлах интегрирования для каждого КЭ тела. Интегрирование по его области выполняется с помощью двукратного применения квадратурных формул Гаусса с задаваемым числом узлов. Матрица  $[K]$  формируется путем сложения матриц жесткости отдельных КЭ, сохраняется в виде правой верхней полуленты, так как является ленточной и симметричной. Кинематические граничные условия вводятся в матрицу жесткости путем замены ее диагональных членов большим числом ( $\approx 10^{10}$ ) в уравнениях, отвечающих узловым перемещениям, подлежащим аннулированию. При этом матрица жесткости превращается в невырожденную матрицу СЛАУ. Решение системы выполняется методом Холецкого [17]. Полученные на каждом шаге значения узловых перемещений используются для вычисления приращений деформаций, а затем – приращений напряжений. Последовательное суммирование приращений позволяет получить накопленные значения деформаций и напряжений. Построены процедуры цветной визуализации результатов расчета деформированной формы тела, областей уровня значений всех вычисляемых функций.

#### 5. Исходные данные и результаты

Геометрия модели ЛЖ сердца определяется следующими параметрами:  $a_v$  – меньшая полуось внутренней поверхности,  $b_v$  – большая полуось. Они связаны следующим образом: зада-

ется  $a_v$  и отношение  $c = \frac{b_v}{a_v}$ , а затем вычисля-

ется  $b_v = a_v c$ . Далее задаем толщину  $h$  эллипсоида при  $z = 0$ . По толщине определяем внешнюю малую  $a_n = a_v + h$  и большую

$b_n = a_n c$  полуоси. В расчетах принято:  $a_v = 2,5$ ,  $c = 1,2$ ,  $h = 1$  см. Эти данные являются усредненными параметрами реального ЛЖ человека.

Для физически нелинейной задачи использовано описание материала как гиперупругого с потенциалом  $W$  [6,16]. В этих статьях принята следующая форма для  $W$ :

$$W = \frac{C_0}{2} (e^Q - 1) + C_{compr} (J \ln J - J + 1), \quad (38)$$

где  $Q = C_1 E_{rr}^2 + C_2 E_{zz}^2 + C_3 E_{\phi\phi}^2 + C_4 \gamma_{rz}^2 + C_5 \gamma_{z\phi}^2 + C_6 \gamma_{r\phi}^2$ ,

$J = \lambda_r \lambda_z \lambda_\phi$ ,  $\lambda_i = \sqrt{1 + \varepsilon_{ii}}$ ,  $i = r, z, \phi$ ,  $C_0, C_1, \dots, C_6, C_{compr}$  – константы, принимающие различные значения для разных материалов.

Так, для трансверсально изотропного, почти несжимаемого материала модели константы принимают следующий вид:  $C_0 = 0,88$  кПа,  $C_1 = 6,0$ ,  $C_2 = 5,0$ ,  $C_3 = 5,0$ ,  $C_4 = 3,0$ ,  $C_5 = 3,0$ ,  $C_6 = 3,0$  и

$C_{compr} = 3,0$ . Расчеты были выполнены для случая  $C_1 = 5,0$ .

Выпишем для потенциала  $W$  (38) компоненты матрицы  $[D]$ . Они будут иметь следующий вид:

$$\tilde{D}_{ik} = C_0 C_i (2C_k \varepsilon_i \varepsilon_k + \delta_{ik}) e^Q + C_{compr} J \lambda_i^{-2} (\lambda_k^{-2} + \ln J (\lambda_k^{-2} - 2\lambda_i^{-2} \delta_{ik})), \quad i, k = 1..6, \quad (40)$$

где  $\varepsilon_k$  – компоненты вектора  $[\varepsilon]$ ,  $\delta_{ik}$  – символы Кронекера.

К внутренней поверхности прикладываем давление  $q = 1,6$  кПа, которое соответствует полученному экспериментально максимальному значению конечно-диастолического давления, равного 15 мм рт. ст. В расчетах введена сетка  $5 \times 12$ . Использована трехузловая формула Гаусса. Начальный внутрижелудочковый объем равен 71,77 мл.

На рис. 3–6 приведены сетка КЭ, интенсивности напряжений, деформаций и распределение перемещений при  $C_0 = 0,88$  (норма) и  $C_0 = 1,2$  (кардиосклероз). Интенсивность напряжений при  $C_0 = 0,88$  меняется от 0,071 до 5,092 кПа, при  $C_0 = 1,2$  – от 0,079 до 5,355 кПа. Интенсивность деформаций при  $C_0 = 0,88$  меняется от 0,009 до

0,691 кПа, при  $C_0 = 1,2$  – от 0,008 до 0,529 кПа. Распределение полных перемещений при  $C_0 = 0,88$  меняется от 0,0 до 1,22 см, при  $C_0 = 1,2$  – от 0,0 до 0,934 см.

При  $C_0 = 0,88$  внутрижелудочковый объем в конце диастолы равнялся 159,36 мл. Приращение внутрижелудочкового объема составило 87,59 мл. При  $C_0 = 1,2$  (кардиосклероз, при котором повышается жесткость миокарда) конечно-диастолический объем равнялся 134,86 мл. Таким образом, приращение внутрижелудочкового объема составило 63,09 мл. Как видно, при  $C_0 = 1,2$  происходит уменьшение наполнения ЛЖ.

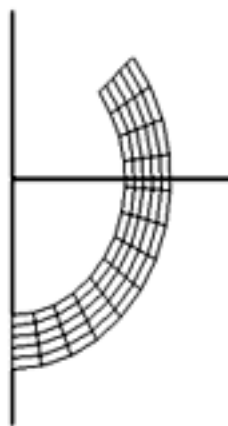


Рисунок 3. Сетка КЭ модели ЛЖ

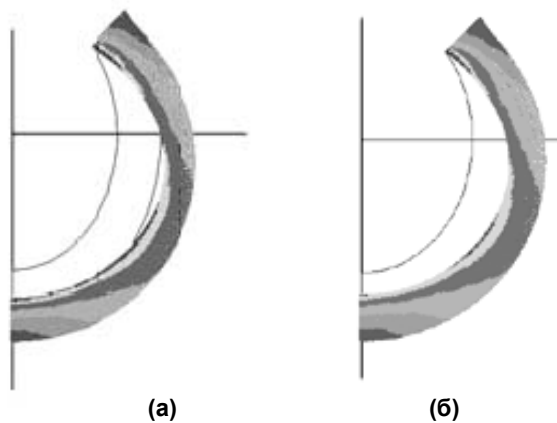
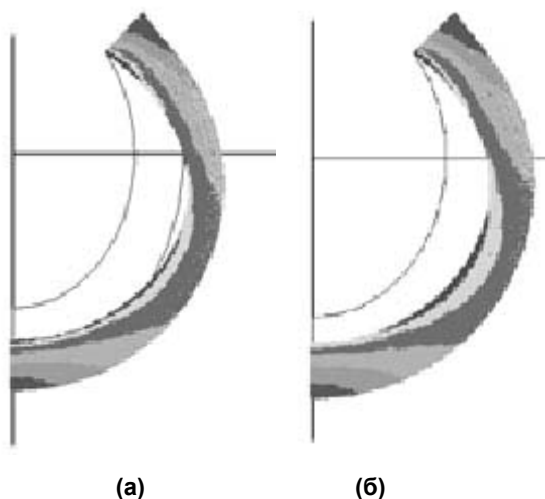
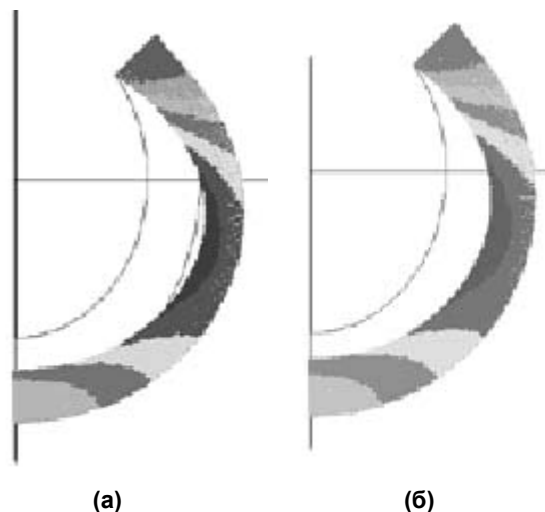


Рисунок 4. Интенсивность напряжений при а)  $C_0 = 0,88$ ; б)  $C_0 = 1,2$ .





**Рисунок 5. Интенсивность деформаций при а)  $C_0 = 0,88$ ; б)  $C_0 = 1,2$ .**



**Рисунок 6. Распределение полных перемещений при а)  $C_0 = 0,88$ ; б)  $C_0 = 1,2$ .**

### Литература

1. Кантор Б.Я. Нелинейная кардиобиомеханика левого желудочка / Б.Я. Кантор, Н.И. Яблчанский, В.Е. Шляховер. – Киев: Наук. думка, 1991.– 212 с.
2. Costa K.D. A three-dimensional finite element method for large elastic deformations of ventricular myocardium: I-cylindrical and spherical polar coordinates / K.D.Costa, P.J.Hunter, J.M.Rogers, J.M.Guccione, L.K.Waidman, A.D. McCulloch // Transactions of the ASME –1996.–118.–P. 452–463.
3. Costa K.D. A three-dimensional finite element method for large elastic deformations of ventricular myocardium: II – prolate spheroidal coordinates / K.D. Costa, P.J. Hunter, J.S. Wayne, L.K. Waidman, J.M. Guccione, A.D. McCulloch // Transactions of the ASME –1996. – 118.–P. 464–472.
4. Guccione J.M. Finite element stress analysis of left ventricular mechanics in the beating dog heart / J.M. Guccione, K.D. Costa and A.D. McCulloch // J. Biomechanics –1995.–28.–P. 1167–1177.
5. Costa K.D. Lamellar fiber architecture and three-dimensional systolic mechanics in canine ventricular myocardium / K.D. Costa, Y. Takayama, A.D. McCulloch and J.M. Covell // Am. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol. 45) –1999.– 276.–P. 595-607.
6. Usyk T.P. Effect of laminar orthotropic myofiber architecture on regional stress and strain in the canine left ventricle / T.P. Usyk, R. Mazhari and A.D. McCulloch // In: Cowin S.C., Humphrey J.D., eds. Cardiovascular Soft Tissue Mechanics, Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers. – 2001.–P. 143-164.
7. Omens J.H. Complex distributions of residual stress and strain in the mouse left ventricle: experimental and theoretical models / J.H. Omens, A.D. McCulloch and J.C. Criscione //

- Biomechan. Model. Mechanobiol. – 2003.– 1. – P. 267-277.
8. Guccione J.M. Mechanics of active contraction in cardiac muscle: Part I – constitutive relations for active fiber stress that describe deactivation / J.M. Guccione and A.D. McCulloch // ASME J. Biomech. Eng. – 1993. – 115.– P. 72-81.
9. Guccione J.M. Mechanics of active contraction in cardiac muscle: Part II – cylindrical models of the systolic left ventricle / J.M. Guccione, L.K. Waldman and A.D. McCulloch // ASME J. Biomech. Eng. – 1993.– 115.– P. 82-90.
10. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер.–М.: Наука, 1979.– 560 с.
11. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, физ.-мат. гиз, 1980, 512 с.
12. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984.– 428 с.
13. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз.– М.: Мир, 1981.–304 с.
14. Кантор Б.Я. Самокорректирующийся шаговый процесс расчета гибких оболочек / Б.Я. Кантор, Г.Д. Баевская. – Харьков, 1977.– 12 с.– (Препринт/АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 54).
15. Кантор Б.Я. Уравнения модифицированной теории тонких оболочек Тимошенко в векторно-вариационной форме / Б.Я. Кантор, Е.В. Еселева // АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения.– Харьков, 1991.– 13 с.– Деп. в ВИНТИ 10.06.91, № 2429-B91.
16. Usyk T.P. Regional septal dysfunction in a three-dimensional computational model of focal myofiber disarray / T.P. Usyk, J.H. Omens and A.D. McCulloch // Am. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol. 50) –2001.–281.–P. H506-H514.
17. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 480 с.

### Контактная информация:

Кантор Борис Яковлевич, E-mail: bkantor@ukr.net  
 Мисюра Евгения Юрьевна, E-mail: misuraeu@mail.ru