УДК 616.71–001.5}.001.57

СИСТЕМНЫЕ ОСНОВЫ МЕТОДОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕЛОМОВ КОСТНОЙ ТКАНИ

К.В. Миренков, И.Д. Труфанов, И.И. Труфанов

Запорожский государственный медицинский университет
Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина

В развитие дискуссии, поисков, гипотез по семиотике развития теоретического направления «фрактурология – некоторые аспекты теоретизации учения о переломах».

Особенностью современного развития познания окружающего нас жизненного пространства и человеческого общества как организованных по объективным законам физической среды и социальной системы любого уровня и любой степени организации является, помимо глубокого интереса к теоретико-методологическим проблемам, дальнейшее становление интенсивно развивающихся новейших направлений комплексных системных исследований в области философских, обществоведческих, естественнонаучных системных представлений. Теоретической базой системных исследований являются алгоритмические соотношения закономерностей существования, динамического функционирования и развития различного рода системных образований на базе математического описания, которым присущи следующие элементы:

– объективно существующая система (система – объект исследования), являющаяся источником системного научного знания (система как морфологический прообраз теоретической системы);

– теоретическая научная система как отражение в мышлении объективно существующей системы;

– движение этой теоретической системы в направлении всё более адекватного отражения объективно существующей системы;

– практика как исходный пункт познания, его основа и критерий истинности, как сфера использования знаний о системе.

В области медицинской науки, как одного из направлений познания природы и законов жизнедеятельности человека, существование и развитие системологических представлений о современном этапе эволюции природы и человека проводится на основе отражения объективной действительности состояния науки о природе и человеке, где системный подход – грань конкретизации о всеобщей связи, движении и развитии в непротиворечивых различиях.

Теоретико-методологические проблемы системного познания человека направлены на конкретные потребности практики сознательного научного управления процессами жизнедеятельности отдельных функциональных органов и человека в целом.

Авторы понимают всю сложность системных представлений о психофизиологических, биомеханических и других видах функционирования такой системы как человек, её познания, отражения в сознании человека, а затем на основе полученного системного знания практического воздействия и сознательного управления её функционированием и развитием. **Системный подход** органически соединяет анализ и синтез, качественное и количественное, эвристических и логико-математических методов, взаимодействие различных сфер и сторон общественной жизни человека. Таким образом, в медицинской науке выдвигается **программно-целевой подход** к планированию, управлению, исследованиям в отдельных направлениях изучения жизнедеятельности конкретных, частных, проблем достижения общих целей.

Введение

Динамическое, в смысле движения и развития, функционирование человеческого организма с гносеологических позиций на современном этапе развития медицинской науки представляется множеством эвристически-эмпирических систем знания. Однако системы, отличающиеся с позиций функционального отображения реакций органов и организма человека в целом на внешние раздражители и патологические отклонения в развитии, в некоторых морфологических и предметно-центрических отношениях являются сходными (подобными) с позиций системных результатов познания природы человека. С одной стороны это подобие представляется однозначным интегративным соответствием структуры (взаимосвязи компонентов) одной системы структуре другой системы (изоморфизм системы). С другой стороны это соответствие является только частичным подобием в отдельных компонентах или элементах структуры (гомоморфизм системы). С системных позиций гомоморфны, например, нервная клетка нервной системы и полупроводниковый транзистор как «нервный» элемент электронной вычислительной машины (ЭВМ) (технической нервной системы).Их гомоморфизм и дуальность материальной природы заключается в идентичности их принципа действия и связи с другими элементами системы, т.е. нейрон по каналам связи (синапсам) может находиться либо в состоянии покоя, либо в возбуждённом (проводящем информацию) состоянии. Транзистор по электрическим проводникам также соединяется с другими элементами ЭВМ и либо включается или не включается в проводящее состояние. Особенно гомоморфны технические конструкции машин, строительных комплексов, инженерных сооружений по распределению и преобразованию различных энергетических потоков (электрической, гидравлической, механической и др.) и костно-мышечная система человека и системы его жизнеобеспечения (кровообращение, пищеварительная и лимфатическая системы и др.).

Наличие изоморфизма, гомоморфизма и других разновидностей подобия различных целостных систем позволяет применить единый алгоритмический механизм описания процессов моделирования, т.е. мысленного воспроизведения той или иной системы медицины посредством другой, подобной ей в том или ином отношении в системотехническом смысле.

Развитие теоретизации учения о переломах костного состава скелета человека на современном этапе развития ортопедии, травматологии и протезирования предполагает наличие методологических и теоретических предпосылок, высказанных Б.И. Сименачем [1, 2, 4]. Методологической базой разработки процедур моделирования является физические коды: слова, рисунки, числа и др. символы, но целенаправленная увязка генетических зависимостей и физических особенностей функциональных органов скелета человека в динамическом развитии и движении возможна только на основе математической теории систем и системного анализа разнообразных концепций медицины и методами анализа и синтеза смежных научных направлений научного знания человека (технической кибернетики, инженерной психологии, теории организации и т.п.).

Теоретизация знаний о природе человека по нашему мнению, является перспективным научным направлением становления медицинской кибернетики. Математическое, кибернетическое (формально-логическое подобие или чисто структурного характера) подобие отражается интегративным аппаратом формального описания процессов движения органов ортопедической системы человека. Таким аппаратом является аппарат математического анализа является высшей формой функционального анализа интегрального дифференциального исчисления [9, 10, 11].

В связи со сложнейшими процессами движения органов костно-мышечной системы человека как объекта биомеханики в качестве математического аппарата функционального анализа авторами данной работы принимается аппарат тензорного исчисления как высший элемент функционального анализа и математической топологии, позволяющего:

– выявить и математически увязать в единое целое наиболее общие и узкочастные значения системных характеристик и закономерностей, не зависящих от конкретного типа физиологических комплексов и их «технических» аналогов в виде систем дифференциальных и интегральных уравнений;

– разработать теоретические и экспериментальные методы, позволяющие с достоверной точностью оценивать теоретико-морфологические концепции медицинской теории объектов ортопедии;

– изучить системотехническое взаимодействие энергетических процессов движения объектов биомеханики человека и формировать на этой основе обобщённых критериев частных типов систем физиологии органов опорно-двигательного аппарата – разработать и реализовать оптимальные конструкции протезных элементов органов костной системы человека.

Ниже авторами данной работы поддерживается идея научной дискуссии развития «принципиально новых закономерностей и новых идей» состояния учения о переломах костей [1, 2, 4] («фрактурологии» по Б.И. Сименачу), как ветви научного знания в медицине, и в качестве практического участия в указанной дискуссии представляются первые результаты теоретических разработок в указанном направлении становления развития медицинской кибернетики. На базе данных результатов авторами проводятся исследования по методологии создания математического аппарата тензорного исчисления биомеханики движения органов опорно-двигательного аппарата человека, на основе которого разрабатываются научные концепции математического моделирования процессов внешней и внутренней динамики движения, как отдельных элементов, так и костных комплексов в целом, и динамических процессов разрушения костных образований скелета человека.

При концептуальном виде математического моделирования фрактурологических процессов принимается к исследованию концепция построения модели «генезиса синдрома перелома (ГСП, [2]) и на её основе получение параметров графа ([2, с. 124]) интерактивного взаимодействия при компьютерном управлении детерминированными и стохастическими процессами репаративной регенерации.

Такая модель будет являться инструментом слежения за течением лечебного процесса и прогностическим алгоритмом его коррекции с учётом онто- филогенетических факторов. Основным достоинством предлагаемой нами «тензорной» модели является учёт «стадийности» [2, с. 129] (динамики течения) процесса сращения кости при приоритете клинического мышления лечащего врача или врача-исследователя. Отдельные вопросы исследований авторов данной работе направлены на разработку математических алгоритмов использования конкретно ориентированных и количественно дозированных видов лечебных динамических процессов вибрационного, изотонического и других видов напряжения костно-мышечного комплекса человека при травматической болезни (граф [4, с. 108]).

В своих исследованиях авторы используют в качестве факторов, влияющих на процесс репаративной регенерации костной ткани, многоаспектные факторы ([4, с. 109]) микро- и макроструктурных аномалий. Исследования проводятся на базе управляемого процесса биомеханики коленного сустава на основе тензорного исчисления механики сплошной среды.

Основные направления исследований. Результаты и их обсуждение

Механика сплошной среды изучает физические объекты, для описания которых применяется математический аппарат, не зависящий от выбранной системы координат. Такие системы удобно изучать в некоторой надлежащим образом выбранной системе координат. Математически такие системы описываются математическими величинами – тензорами.

Тензор как математический объект существует независимо от системы координат, в то же время он может быть задан в каждой системе координат определённой совокупностью величин, являющихся компонентами тензора.

Если компоненты тензора заданы в одной системе координат, то они определены и в любой другой системе, т.к. определение тензора включает в себя закон преобразования его компонента. В нашем случае состояние динамического функционирования органов систематической анатомии человека принимается в виде физических законов механики сплошной среды, которые выражаются тензорными уравнениями. Вследствие линейности и однородности тензорных преобразований тензорные уравнения, верные в одной системе координат, верны и в другой. Такая инвариантность тензорных преобразований координат [14] является одной из системных характеристик тензорного исчисления механики сплошной среды.

1. Элементы функциональных органов как тензоров. Основные функции органов человека и организма в целом, с точки зрения механики сплошной среды – изменение положения частей тела и передвижение его частей в пространстве.

При выполнении математического анализа параметров биомеханики движения тела и его отдельных органов применяется метод автономного движения отдельных органов относительно какой-либо оси или набора осей и плоскостей, принятых в медицине ([3, с.19]), которой соответствует тензор с компонентами ортонормированного базиса. Описание положения тела человека в пространстве, расположение органов относительно друг друга, в виде компонент тензора приведено на рис.1. При плоскости (сагиттальная, фронтальная и горизонтальная) описываются в системах координат (рис.1) ZOY, XOZ,

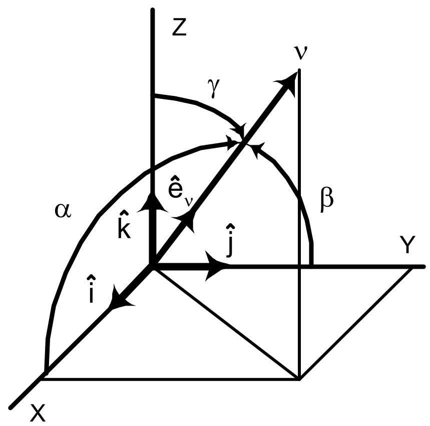

Рисунок 1.
Ортонормированный триэдр единичных векторов

XOY, т.е. каждый из органов систематической анатомии человека описывается метрическими тензорами. Параметры и основные соотношения тензорных уравнений в виде дифференциальных уравнений рассматриваются отдельно.

2. Опорная функция скелета реализуется за счёт выполнения функций длинных и коротких рычагов, приводимых в движение мышцами. Тензор длинной трубчатой кости как элемента скелета приведён на рис.2.

3. Тензор бедренной кости. Самая большая и длинная трубчатая кость [3, с. 27], имеющая тело и два конца. Линии и элементы данной кости приведены в [3, с. 137], элементы тензора для которой показаны на рис.3. Тензор шейки бедра приведен на рис.4.

4. Элемент тензора коленного сустава. Коленный – наиболее сложный сустав, состоящий из бедренной и большеберцовой костей и надколенника. Суставная поверхность бедренной кости образована медиальным и латеральным мыщелками, имеющими эллипсоидальные очертания, и расположенной впереди надколенниковой поверхностью [3, с. 205]. Данному элементу и иным отдельным элементам сочленения соответствует тензор, приведенный на рис.5.

5. Тензор медиальной группы мышц бедра. Mm. gracilis, pectineus, adductor longus, adductor brevis, adductor magnus [3, с. 337] и др. параметры медиальной группы мышц бедра представляются в виде двух тензоров (рис.6, 7).

6. Основы тензорного исчисления при описании элементов коленного сустава.

При любом преобразовании одной произвольной системы криволинейных координат в другую имеем тензоры обычные, если принять преобразование однородных систем координат – тензоры декартовы. Классификация тензоров производится по рангу или порядку в соответствии с частным видом законов преобразования.

В R^n евклидовом пространстве число компонент тензора равно n^N (N – порядок тензора). Тензор нулевого порядка (ранга) задаётся одной компонентой (скаляром). Тензоры первого ранга имеют три координатные компоненты в 3-х мерном пространстве (векторы). Тензоры второго порядка – диадики, третьего ранга – триадики, четвёртого ранга – тетрадики.

Ортогональная система координат xOyz имеет базисные векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и скалярные компоненты λ,μ,ν вектора $\vec{v}$, выраженные в виде $\vec{v} = \vec{a}\lambda + \vec{b}\mu + \vec{c}\nu$. Базисные векторы линейно независимы, т.е. $\vec{a}\lambda + \vec{b}\mu + \vec{c}\nu = 0$ при $\lambda = \mu = \nu = 0$. В ортогональной декартовой системе в качестве базиса принимается набор единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленных вдоль осей координат (рис. 1), которые образуют правый триэдр единичных векторов, для которых векторное произведение $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. Скалярное произведение: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$; вектор $\vec{v}$ (рис.1) в виде линейной комбинации единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ равен $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$, в которой декартовы компоненты $v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} = v \cdot \cos\alpha$; $v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} = v \cdot \cos\beta$; $v_z = \vec{v} \cdot \vec{k} = v \cdot \cos\gamma$. Единичный вектор направления вычисляется по выражению

$$\vec{e}_v = \vec{v}/v = (\cos\alpha)\vec{i} + (\cos\beta)\vec{j} + (\cos\gamma)\vec{k}.$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \cdot \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) = \\ = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Для тех же векторов векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ равно: $\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k}$. В матричном виде данное произведение имеет вид $\vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ (первая строка: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; вторая: a_x, a_y, a_z; третья: b_x, b_y, b_z). Смешанное произведение векторов в виде матрицы $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$ (первая строка: a_x, a_y, a_z; вторая: b_x, b_y, b_z; третья c_x, c_y, c_z). Диада $\vec{a}\vec{b}$, выраженная через декартовы компоненты, имеет вид

$$\vec{a}\vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \cdot \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) = \\ = a_x b_x \vec{i}\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\vec{j} + \\ + a_y b_z \vec{j}\vec{k} + a_z b_x \vec{k}\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\vec{k}.$$

Данное выражение является девятичленной формой диады $\vec{a}\vec{b}$. Любой тензор второго ранга записывается в девятичленной форме. Для единичного диадика $\vec{I} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$.

Вектор $\vec{a}$ будет являться функцией вектора $\vec{b}$: $\vec{a} = \vec{D} \cdot \vec{b}$; $\vec{D} = \vec{u}\vec{i} + \vec{v}\vec{j} + \vec{w}\vec{k}$ ($\vec{D}$ – линейный векторный оператор). Компоненты тензора любого ранга и тензор представляется в виде индексных обозначений (тензорных символов): a_i, $b^j, T_{ij}, F_i^j, \varepsilon_{ijk}, R^{Pov}$. Буквенный индекс в каждом члене имеет место один или два раза. Если индекс употреблён один раз, то он принимает значения $1, 2, \ldots, N$ (N – размерность индекса), если дважды – он принимает все значения из своего интервала изменения и члены соответствующие каждому значению индекса: $a_i, \vec{a}^i$ – тензоры первого ранга; $a_{ii}, b_j, F_{ikk}, R_{pq}^P, \varepsilon_{ijk}, u_j v_k$ – тензоры второго ранга с двумя свободными индексами. Произвольный тензор второго ранга $\vec{D}$ имеет выражение $\vec{D}^{ij}$, $\vec{D}_i^j$ или $\vec{D}_i^j$, $\vec{D}_{ij}$. В трёхмерном пространстве (оба индекса i, j меняются от 1

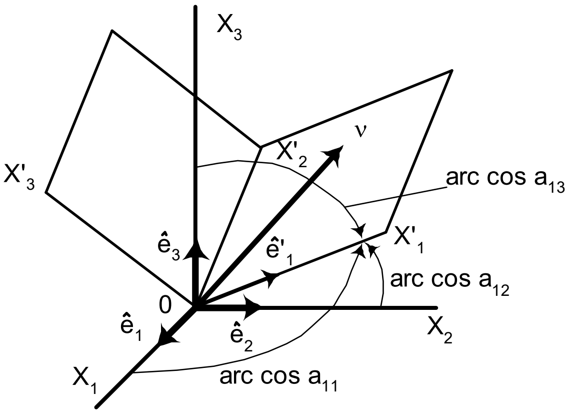

Рисунок 2 .
Декартовы тензоры первого ранга

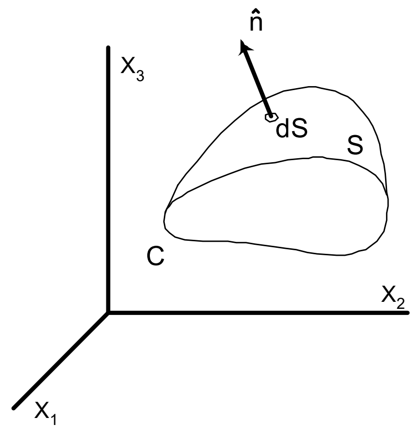

Рисунок 3.
Криволинейный объёмный элемент тензора

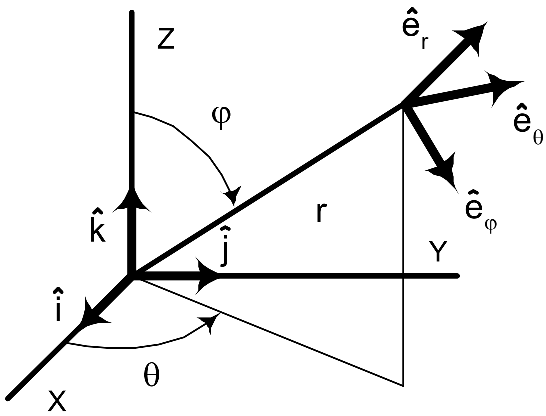

Рисунок 4 .
Триэдр правой системы координат тензора

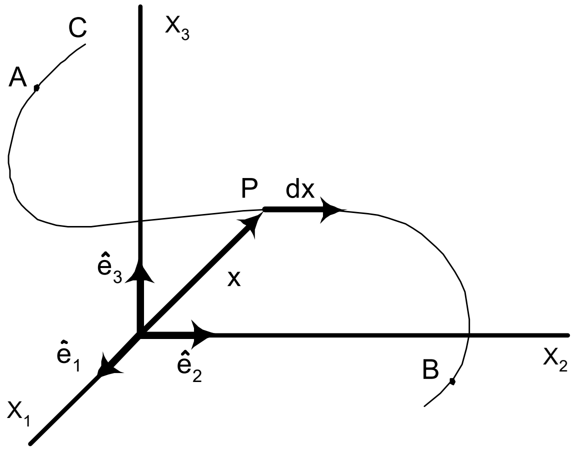

Рисунок 5.
Пространственная описывающая контурная кривая как элемент тензора

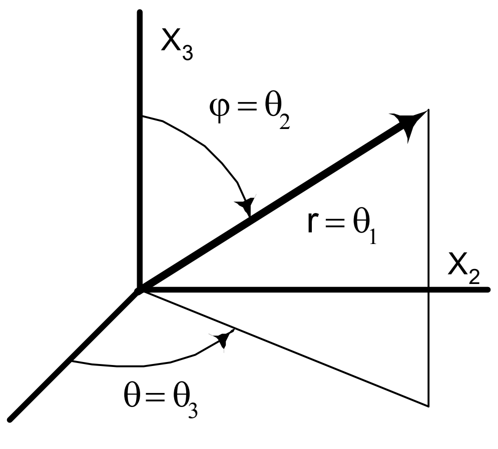

Рисунок 6.
Метрический тензор в сферической системе координат

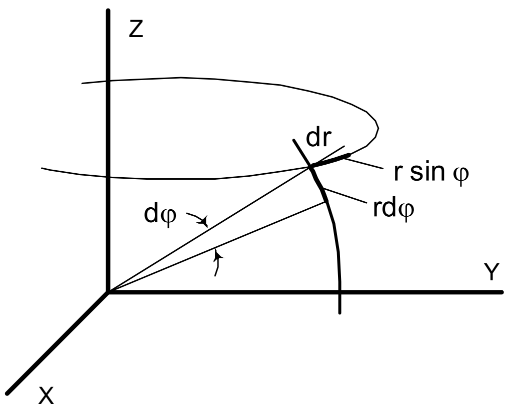

Рисунок 7.
Длина линейного элемента dS (приращения криволинейной координаты $d\theta_i$) как элемент тензора

до 3) и символ A_{ij} представляется девятью компонентами тензора второго ранга $\vec{A}$: $\vec{A}_{ij} = \lfloor A_{ij} \rfloor$, $i = 1,2,3; j = 1,2,3$. Компоненты тензора первого ранга (вектора) в 3-х мерном пространстве представляется матричной строкой или матричным столбцом вида

$$a_i = \lfloor a_1, a_2, a_3 \rfloor \text{ или } a_i = [a_1, a_2, a_3]^T .$$

В N-мерном пространстве тензор n-го ранга имеет N^n компонент. В 3-х мерном пространстве уравнение в индексной форме имеет вид $\vec{x}_i = c_{ij} \vec{z}_j$ или в развёрнутом виде представляет систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3 \end{cases}$$

или в индексной форме имеет четыре соотношения:

$$A_{11} = B_{11}C_{11}D_{11} + B_{11}C_{12}D_{12} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22}$$
$$A_{12} = B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22}$$
$$A_{22} = B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22}$$

Если $i, j = 1,2,3$, то A_{ij} в индексной форме даёт девять соотношений, каждое из которых имеет девять членов в правой части.

Для произвольной системы координат x^1, x^2, x^3 в 3-х мерном пространстве и θ^i – любая другая система координат $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ в том же пространстве определяет формулы преобразования координат $\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3)$ для любой точки (x^1, x^2, x^3) системы x^i, для которой составляется новый набор координат $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ в системе θ^i в виде определителя Якоби:

$$I = \begin{bmatrix} \frac{\partial\theta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\theta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\theta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\theta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial\theta^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

или в компактном виде $I = \left[\frac{\partial\theta^i}{\partial x^j} \right]$.

Компоненты дифференциала $d\theta^i$ будут равны $d\theta^i = \frac{\partial\theta^i}{\partial x^j} dx^j$ (класс контравариантных векторов). Для тензоров второго ранга компоненты $B^{ij} = \frac{\partial\theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial\theta^j}{\partial x^s} B^{rs}$. Частные производные от скалярной функции по координатам дают ковариантные тензоры $\frac{\partial Y}{\partial\theta^i} = \frac{\partial Y}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial\theta^i}$, которые подчиняются преобразованию $b_i = \frac{\partial x^j}{\partial\theta^i} b_j$. Ковариантные тензоры второго порядка имеют преобразование $B_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial\theta^i} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial\theta^j} B_{rs}$. Ковариантные тензоры высокого порядка и смешанные тензоры $T^r_{.sp} = \frac{\partial\theta^r}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial\theta^s} \frac{\partial x^q}{\partial\theta^p} T^m_{.nq}$ определяются аналогично.

Если используется две системы координат (ортогональных) с началом в общей точке, то преобразования $v_j = a_{ij}a_{ik}v_k$, где коэффициент $a_{ij}a_{ik}$ – дельта Кронекера, равная $\delta_{ij} = 1$, если $i = j; \delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, т.е. $\delta_{ik} = a_{ij}a_{ik}$ состоит из девяти компонент (условий ортогональности). Дельта Кронекера (рис. 5) – оператор замены:

$$\delta_{ij} b_j = \delta_{i1} b_1 + \delta_{i2} b_2 + \delta_{i3} b_3 = b_i$$

или $\delta_{ij} F_{ik} = \delta_{1j} F_{1k} + \delta_{2j} F_{2k} + \delta_{3j} F_{3k} = F_{jk}$.

При описании криволинейных поверхностей применяется система криволинейных интегралов, основой построения которых являются алгоритмы дифференцирования по переменной x_i вида

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i} = Y_{,i} ; \; \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} ; \; \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} ; \; \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} = v_{i,jk} ;$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} ; \; \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,km} ; \; gradY = \nabla Y = \frac{\partial Y}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

или $\partial_i Y = Y_{,i}$; $div\vec{v} = \nabla \vec{v}$ или $\partial_i v_i = v_{i,i}$; $rot\vec{v} = \nabla x \vec{v}$ или $\varepsilon_{ijk} \partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$; $\nabla^2 Y = \nabla \cdot \nabla Y$ или $\partial_{ii} Y = Y_{,ii}$; ∇ – оператор Гамильтона.

Если определена векторная функция $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ (рис.5) $ud\vec{x}$ – элементарный вектор касательной, то интеграл $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_A}^{\vec{x}_B} \vec{F} \cdot d\vec{x}$ или в индексных обозначениях (рис.3) $\oint F_i dx_i = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} dS$.

При определении взаимодействия при взаимосвязанных воздействиях (рис.4) следует выразить единичные векторы $\vec{e}_Y, \vec{e}_\theta, \vec{e}_r$ через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, которые составляют триэдр правой системы, т.е. $\vec{e}_Y \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_r$. В соответствии с рис.4 имеем

$$\vec{e}_Y = (\cos Y \cos\theta)\vec{i} + (\cos Y \cos\theta)\vec{j} - (\sin Y)\vec{k},$$

$$\vec{e}_\theta = (-\sin\theta)\vec{i} + (\cos\theta)\vec{j},$$

$$\vec{e}_r = (\sin Y \cos\theta)\vec{i} + (\sin Y \sin\theta)\overrightarrow{j+} - (\cos Y)\vec{k},$$

откуда следует матрица

$$\vec{e}_Y \times \vec{e}_\theta = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos Y \cos\theta & \cos Y \sin\theta & -\sin Y \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

При вычислении параметров компонент метрического тензора в сферической системе координат (рис.6)

$$r = \theta_1;\ Y = \theta_2;\ \theta = \theta_3$$

или $x_1 = \theta \sin\theta_2 \cos\theta_3$; $x_2 = \theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3$;

$$x_3 = \theta_1 \cos\theta_2 .$$

В дифференциальной форме

$$\frac{\partial x_1}{\partial\theta_1} = \sin\theta_2 \cos\theta_3;\ \frac{\partial x_1}{\partial\theta_2} = \theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3;$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial\theta_3} = -\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3;\ \frac{\partial x_2}{\partial\theta_1} = \sin\theta_2 \sin\theta_3;$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial\theta_2} = \theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3;\ \frac{\partial x_2}{\partial\theta_3} = \theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3;$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial\theta_1} = \cos\theta_2;\ \frac{\partial x_3}{\partial\theta_2} = -\theta_1 \sin\theta_2;\ \frac{\partial x_3}{\partial\theta_3} = 0,$$

откуда вычисляется

$$q_{11} = \frac{\partial x_i}{\partial\theta_1}\frac{\partial x_i}{\partial\theta_1} = \sin^2\theta_2 \cos^2\theta_3 + \\ + \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3 + \cos^2\theta_2 = 1 \quad ;$$

$$q_{22} = \frac{\partial x_i}{\partial\theta_2}\frac{\partial x_i}{\partial\theta_2} = \theta_1^2 \cos^2\theta_2 \cos^2\theta_3 + \\ + \theta_1^2 \cos^2\theta_2 \sin^2\theta_3 + \theta_1^2 \sin^2\theta_2 = \theta_1^2 \quad ;$$

$$q_{33} = \frac{\partial x_i}{\partial\theta_3}\frac{\partial x_i}{\partial\theta_3} = \theta_1^2 \sin\theta_2 \sin^2\theta_3 + \\ + \theta_1^2 \sin^2\theta_2 \sin^2\theta_3 = \theta_1^2 \sin^2\theta_3 \quad .$$

Для $p \neq q$ величина $q_{pq} = 0$, т.е., например,

$$q_{12} = \frac{\partial x_i}{\partial\theta_1}\frac{\partial x_i}{\partial\theta_2} = (\sin\theta_2 \cos\theta_3)(\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3) + \\ + (\sin\theta_2 \sin\theta_3)(\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3) - (\cos\theta_2)(\theta_1 \sin\theta_2) = 0 .$$

В сферических координатах

$$(ds)^2 = (d\theta_1)^2 + (\theta_1)^2 (d\theta_2)^2 + (\theta_1 \sin\theta_2)^2 (d\theta_3)^2$$

или $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (dY)^2 + (r \sin Y)^2 (d\theta)^2$.

Измерение длины линейного элемента ds, соответствующее приращению криволинейной координаты, равно $ds = \sqrt{q_{ii}}\, d\theta_i$, откуда следует $(ds)^2 = q_{pq} d\theta_p d\theta_q$. Для линейного элемента $(d\theta_1, 0, 0)$ имеем: $(ds)^2 = q_{11}(d\theta_1)^2$; $ds = \sqrt{q_{11}}\, d\theta_1$. Для элемента $(0, d\theta_2, 0)$ величина $ds = \sqrt{q_{22}}\, d\theta_2$; для $(0,0,d\theta_3)$ $ds = \sqrt{q_{33}}\, d\theta_3$. Значения q_{ii} приведены выше.

В сферической системе координат (рис.7) имеем:

1) для $(d\theta_1, 0, 0)$ – $ds = d\theta_1 = dr$;
2) для $(0, d\theta_2, 0)$ – $ds = \theta_1 d\theta_2 = r dY$;
3) для $(0, 0, d\theta_3)$ – $ds = \theta_1 \sin\theta_2 d\theta_3 = r \sin Y d\theta_3$.

Если β_{12} – угол между линейными элементами $(d\theta_1, 0, 0)$ и $(0, d\theta_2, 0)$, то величина углового коэффициента (направляющего косинуса) равна

$$\cos\beta_{12} = \frac{q_{12}}{\sqrt{q_{11}}\sqrt{q_{22}}} = q_{12}\frac{d\theta_1}{ds_1}\frac{d\theta_2}{ds_2} .$$

Заключение

Рассмотренный подход к описанию параметров и характера движения биомеханических элементов и систем функциональных элементов систематической анатомии человека позволяет на основе обобщённых математических алгоритмов динамики движения сплошной физико-механической среды, включающей в себя элементы гидромеханики движения костного остова, мышечного покрова, кровеносной и лимфатической системы. Такими математическими обобщёнными алгоритмами описания нагруженного состояния органов человека являются алгоритмы описания детерминированного и стохастического напряжённого состояния в виде зависимостей между физическими величинами, не зависящими от выбора системы координат. В качестве таких величин приняты тензоры, на основе которых разрабатываются законы их преобразования, являющиеся основными компонентами интегро-дифференциальных уравнений движения в евклидовом и декартовом пространстве.

Тензорные уравнения позволяют, абстрагируясь от конкретной физиологической среды, провести анализ напряжённого состояния, оценить динамические деформации, вычислить параметры статики и динамики движения и напряжённого течения элемента сплошной среды, получить функции упругого сопротивления и диаграммы пластичного взаимодействия между элементами соединения костных комплексов, определить закон вязкоупругого движения.

Литература

1. Сіменач Б.І. Теоретико-методологічні аспекти ортопедичної науки // Ортопедия, травматология и протезирование. №2, 2002. С.11–18.

2. Сименач Б.И. Фрактурология – некоторые аспекты теоретизации учения о переломах. Часть 1. О генезисе синдрома перелома // Ортопедия, травматология и протезирование. №3, 2000. 121–129.

3. Анатомия человека / Э.И. Борзяк, Л.И. Волкова, Е.А. Добровольская и др. М.: Медицина, 1997. Том 1. 544 с.

4. Сименач Б.И. Фрактурология – некоторые аспекты теоретизации учения о переломах. костей. Ч.2. Управление процессами репарации // Ортопедия, травматология и протезирование. №4, 2000. С.105–111.

5.Островерхов Г.Е., Бомаш Ю.М., Лубоцкий Д.Н. Оперативная хирургия и топографическая анатомия. Курск–М.: АОЗТ Литера. 1996. 720 с.

6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. Минск: Наука и техника, 1983. 287 с.

7. Дьяконов В. MATHCAD 8/2000. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2001. 592 с.

8. Боровиков В. STATISTIKA: Искусство анализа данных на компьютере. СПб.: Питер, 2001. 656 с.

9. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной / Под ред. В.А. Садовничего. М.: Высшая школа, 2002. 725 с.

10. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн.2. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы./ Под ред. В.А. Садовничего. М.: Высшая школа, 2002. 712 с.

11. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1072 с.

12. Композиционные материалы. Справочник / Л.Р. Вишняков, Т.В. Грудина, В.Х. Кадыров и др. Под ред. Д.М. Карпиноса. К.: Наукова думка, 1985. 592 с.

13. Синергетика и усталостное разрушение металлов: Сб. научн. труд. М.: Наука, 1989. 246 с.

14. Muller W. Theorie der elastischen Verformung. Leipzig: Akade mische Verlagsgesellschaft, 1959. 327 p.

15. Vocke W. Lineare Elastizitat. Profilstab und Profilebene. Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1966. 191p.