



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТА

УДК 616.717.4 — 073

ВЕЛИЧИНА ТОРСИИ ПЛЕЧЕВОЙ КОСТИ ЧЕЛОВЕКА

В.В. Органов, А.А. Тяжелов

Харьковский институт ортопедии и травматологии им. проф. М.И. Ситенко

Одним из важных показателей особенностей развития длинных костей человека является величина торсии их метаэпифизов. Многие авторы небезосновательно считают, что показатели торсии метаэпифизов длинных костей связаны с дисплазией и могут служить ее критериями (Е.С.Тихоненков, 1991, А.А.Тяжелов, 1995).

Известно, что величина торсии проксимального отдела плечевой кости у разных людей имеет очень широкий разброс показателей (N.T.Debevoise et al, 1971, F.R.Saha, 1969), принимая при этом крайние значения, что может способствовать развитию нестабильности плечевого сустава.

Целью данной работы является определение средних значений величины торсии проксимального отдела плечевой кости человека, диапазона его изменения и границ паранормальных значений.

В основу исследования положены измерения числовых значений величины торсии проксимального конца 25 образцов нативных плечевых костей человека. В составе серии было рассмотрено 12 правых и 13 левых плечевых костей. Для определения угла торсии был собран измерительный стенд, состоящий из основания, угломерной оптической головки с телеобъективом и опоры для плечевой кости. Угломерная головка позволяла измерить углы с точностью до одной минуты, однако измерения округлялись до $0,5^\circ$, а фактическая погрешность измерения составляла $2-3^\circ$. Такая погрешность измерений не связана с используемой аппаратурой, а обусловлена тем, что плечевая кость (как, впрочем, и любой другой орган человеческого тела) не имеет четких геометрических форм и границ. Например, головка плечевой кости приближается по форме к эллипсоиду вращения, но степень этого приближения разная, искажения формы часто весьма значительны. Граница суставной поверхности головки плечевой кости (линия при-

крепления капсулы сустава) часто несимметрична, поэтому опорные точки, на основе которых проводились измерения, могут быть проставлены с некоторым разбросом. Однако в связи со значительным количеством образцов данная точность измерений достаточна для проведения математической обработки и обоснования выводов.

Величина торсии проксимального отдела плечевой кости определялась как угол между осью головки плеча и осью сгибательно-разгибательных движений локтевого сустава. Фактически измерения проводили не относительно оси локтевого сустава, а относительно линии, соединяющей наиболее выступающие точки суставных поверхностей блока и головки плечевой кости. Практически эти линии параллельны (отклонения не превышают $1-2^\circ$). Так как в процессе роста плечевая кость скручивается и при этом головка плечевой кости поворачивается кзади, можно говорить о физиологической ретроторсии проксимального отдела плеча. В дальнейшем, при упоминании о торсии проксимального отдела плеча будет подразумеваться именно ретроторсия.

Методика определения оси головки плечевой кости была следующей.

Головка плечевой кости проецировалась на плоскость, ориентированную перпендикулярно длинной оси плеча. Проекция представляла собой сектор круга. Ось симметрии сектора принималась при измерении за ось головки плечевой кости. Данные измерений торсионного угла приведены в табл. 1. Они расположены последовательно по мере возрастания угла. Как следует из таблицы, величина торсии проксимального отдела плечевой кости меняется в очень широких пределах, более чем в 4 раза.

При проведении математической обработки принималось, что ошибка измерения каждой величины угла j_i остается неизвестной, и при измерениях нет систематических ошибок. Тогда распределение ошибок должно соответствовать нормальному закону распределения. С другой сто-

Таблица 1 — Величина торсии проксимального отдела плечевой кости

Образцы плечевых костей	левые /правые	Угол торсии φ_i
1	правая	9,5
2	правая	10,5
3	правая	18
4	правая	19
5	правая	23,5
6	правая	26
7	правая	26
8	левая	27,5
9	левая	28
10	правая	28,5
11	правая	29
12	левая	29,5
13	левая	31,5
14	левая	32,5
15	правая	35
16	левая	35,5
17	левая	35,5
18	левая	36,5
19	правая	38
20	левая	39
21	левая	39
22	левая	41,5
23	левая	42
24	левая	43,5
25	правая	44

роны, распределение данных таблицы также должно соответствовать нормальному закону распределения. Это предположение может быть проверено методами математической обработки результатов измерений [1].

Приближенное среднее значение угла торсии j_c как среднего арифметического составляет $30,7^\circ$, для упрощения расчетов принимаем $j_c = 30,5^\circ$. Для уточнения этого значения находим эмпирический центральный момент третьего порядка по формуле (1)

$$M_3 = \frac{1}{n} \sum (\varphi_i - \varphi_c)^3, \quad (1)$$

где n — количество образцов, а j_i берется из табл. 1.

Если j_c выбрано правильно, то $M_3 \neq 0$, то есть сумма кубов положительных и отрицательных разностей $(j_i - j_c)$ равна 0. Подставим в формулу данные из таблицы и получим, что для $j_c = 30,5^\circ$ $M_3 = -463$. Для значений $j_c = 28,5^\circ$ и 29° находим M_3 соответственно — +68 и —70. Сделаем интерполяцию, получаем уточненное значение угла — $28,76^\circ$. Округлив, принимаем среднее значение угла $j_c = 29^\circ$.

Определим далее эмпирическую среднюю квадратичную ошибку по формуле (2)

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \varphi_c)^2} \quad (2)$$

Подставив табличные значения, получим $S = 9,64^\circ$.

Проверим теперь, подчиняются ли нормальному закону распределения данные, приведенные в таблице 1. Для этого определим показатель асимметрии кривой распределения и ее эксцесс.

$$\text{Показатель асимметрии } g_s = \frac{M_3}{s^3} \text{ по модулю}$$

не должен превышать величину своей средней квадратичной ошибки

$$\sigma = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} \quad (3)$$

Подставим $M_3 = -70$ и другие данные и получим $g_s = -0,08$, $s = 0,44$. Так как $|g_s| < s$, то распределение симметрично.

Эксцесс характеризует отход вершины кривой исследуемого распределения от кривой нормального распределения. Эксцесс определяется по формуле (4)

$$E = \frac{M_4}{s^4} - 3, \quad (4)$$

где s — эмпирический стандарт ошибки, M_4 — эмпирический центральный момент четвертого порядка, который определяется в соответствии с выражением (5)

$$M_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \varphi_c)^4 \quad (5)$$

Подставляем значения и определяем эксцесс, $E = (-)0,83$. Значение E по модулю не должно превышать более чем в 2-3 раза свою квадратичную ошибку h , которую вычисляем по формуле (6):

$$h = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}, \quad (6)$$

где $h = 0,8$. Так как $|E| \gg h$, то данные, приведенные в табл. 1, подчиняются нормальному закону распределения. Это обстоятельство позволяет сделать соответствующие выводы.

1. Полученное в результате измерений среднее значение угла ретроторсии проксимального отдела плечевой кости $j_c = 29^\circ$ отражает истинное положение в нормальном распределении величины ретроторсии.

2. В соответствии с правилом “трех сигм” определяем, что с вероятностью 0,994, значение угла j_i будет находиться в пределах $j_c \pm 3s$, то есть от 0 до 58° . Углы, выходящие за эти пределы, будут встречаться не чаще, чем у 6 плечевых костей из 1000.

3. Из практики ортопедии и данных литературы известно, что недостаточная или избыточная ретроторсия может быть причиной нестабильности плечевого сустава примерно в 15% случаев. Попробуем определить граничные значения “патологических зон” распределения. Сделаем оценку величины граничных значений j_r , соответствующих 15% площади распределения. По таблице значений интеграла вероятностей и выражению $0,15 = 1 - 2 j(t)$, находим значение параметра t для величины 0,15. $t = 1,44$. Тогда граничные значения углов ретроторсии проксимального отдела плечевой кости определяем по формуле (7):

$$j_r = j_c \pm tS$$

$j_{r \min} = 14^\circ$, $j_{r \max} = 43^\circ$, таким образом, величина ретроторсии менее 14° и более 43° попадает в патологические зоны.

В клинической практике патологические зоны принимают несколько шире, сюда попадают значения углов ретроторсии менее $18-20^\circ$ и более $35-40^\circ$.

4. Из таблицы 1 следует, что в границы нижней патологической зоны (менее 20°) попадают 4 образца, причем только правые плечевые кости, а в границы верхней патологической зоны попадают 10 образцов, причем только 2 плечевые кости правые, а 8 — левые. То есть можно сделать вывод, что недостаточную ретроторсию чаще имеют правые, а избыточную ретроторсию — левые плечевые кости.

Рекомендуемая литература

1. Тихоненков Е.С. Влияние внесуставных корригирующих остеотомий проксимального конца бедра на стабилизацию и доразвитие тазобедренного сустава при подвывихах у детей. В кн: Материалы V съезда травматологов-ортопедов Белорусской ССР. — Гродно. — 1991. — С. 76-77.
2. Тяжелов А. Методика рентгенологического обследования больных с диспластической нестабильностью плечевого сустава // Ортопед., травматол. и протезир. — 1995. — №3. — С. 30-33.
3. Debevoise NT, Hyatt GW, Townsend GB. Humeral torsion in recurrent shoulder dislocations. // Clin Orthop, 1971. — vol. 76. — P. 87-93.
4. Saha A.K. Treatment of anterior recurrent dislocation of the shoulder. Past, present and future. — SICOT, 11 Congres, Mexico, October, 1969.- P.173-184.
5. Рушимский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. М.: Наука, 1971 - С. 192.

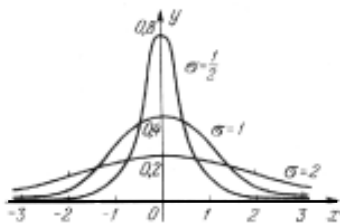
СПРАВОЧНИК ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ

Нормальное распределение (распределение Гаусса). Случайная величина называется распределенной нормально, если она имеет плотность вероятности следующего вида

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{(2\sigma)^2}}, \quad (1)$$

где a и σ - параметры распределения.

Функция (1) представляет собой колоколообразную кривую. параметр a — точка максимума, через которую проходит ось симметрии, параметр σ — расстояние от этой оси до точки перегиба. Если σ мало, то кривая высокая и заостренная, если σ велико, то она широкая и плоская.



На рисунке показано нормальное распределение при $a = 0$ и различных σ .

МОМЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Математическое ожидание. Первый начальный

момент $v_1 = \sum_k X_k p_k$ называют математическим

ожиданием X и обозначается Mx . Математическое ожидание определяет положение центра распределения в следующем смысле: если считать p_k массами, помещенными в точках x_k действительной оси, то Mx - координата центра тяжести этой системы.

Дисперсия. Второй центральный момент называется дисперсией случайной величины X и обозначается Dx , т. е.

$$Dx = \sum_k (x_k - Mx)^2 p_k = M(x - Mx)^2$$

Корень квадратный из дисперсии называется разбросом, или стандартным отклонением, или средним квадратичным отклонением и обозначается через σ_x :

$$\sigma_x = \sqrt{Dx} \quad (3)$$

Величина σ есть мера рассеивания распределения относительно математического ожидания.